放物運動プリント　解答.

問題 1 [斜方投射]

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t \quad \cdots ①$$

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \cdots ②$$

(1). ① より $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$

② に代入して

$$y = v_0 \sin\theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$= \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 \quad //$$

(2). $y = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} x^2 + \tan\theta \cdot x$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x - \boxed{\frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}}\right)^2 + \boxed{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}} \quad //$$

$○(x+\Delta)^2 = ○x^2 + 2\cdot ○\Delta x + ○\Delta^2$ より

$2○\Delta = \tan\theta$

$$\therefore \Delta = \frac{\tan\theta}{2○} = \frac{\tan\theta}{2 \cdot \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{v_0^2 \cos^2\theta \tan\theta}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$$

$$\left(\frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 \cdot \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{v_0^{\cancel{4}\,2} \sin^2\theta \cancel{\cos^2\theta}}{g^2} \cdot \frac{\cancel{g}}{2\cancel{v_0^2}\cancel{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

問題2［斜方投射］

(1) $v_y = 0$ より

$$0 = v_0 \sin\theta - g t_1$$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$ //

水平方向

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t$$

鉛直方向

$$v_y = v_0 \sin\theta - g t$$

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y^2 - v_0^2 \sin^2\theta = -2gy$$

$$h = v_0 \sin\theta \cdot \frac{v_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

(2) $$x = v_0 \cos\theta \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g} \times 2\right) = \frac{2 v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

(3) xは $\sin 2\theta = 1$; $2\theta = 90^\circ$; $\theta = 45^\circ$ のとき最大値 $\frac{v_0^2}{g}$ をとる

$$\therefore L = \frac{v_0^2}{g}$$ //

(4) $v_x = v_0 \cos\theta$ //　　$v_y = -v_0 \sin\theta$ //

(5) $x = l$ となる時刻は $l = v_0 \cos\theta \cdot t$ より $t = \frac{l}{v_0 \cos\theta}$

このときの高さは

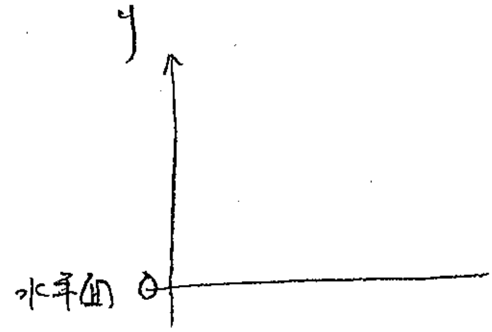
$$y = v_0 \sin\theta \frac{l}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{l}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$= l \tan\theta - \frac{g l^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} > \frac{1}{3} l$$

$\theta = 45^\circ$ を代入して v_0 について解くと

$$v_0 > \sqrt{\frac{3}{2} g l}$$

問題3 [モンキーハンティング]



(1). $y_P = L\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$

$y_Q = v_0\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

(2). ($x = v_0 t$ より) QがPの鉛直線上に達するまでにかかる時間をTとすると、

$L\cos\theta = v_0\cos\theta \cdot T \quad T = \frac{L}{v_0}$

(3) (1)の y_P, y_Q に (2)の $t=T$ を代入すると

$y_P = L\sin\theta - \frac{gL^2}{2v_0^2}$, $y_Q = L\sin\theta - \frac{gL^2}{2v_0^2}$ で $y_P = y_Q$ となる。

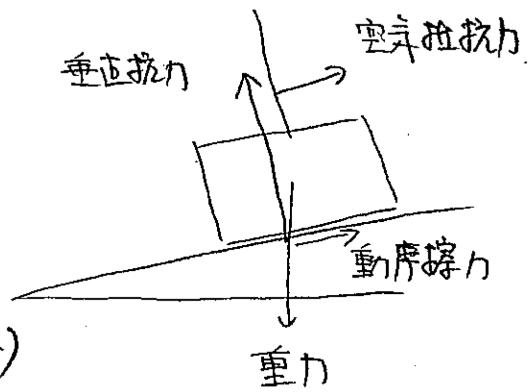
同じ時刻に同じ位置にいるからPとQは衝突する。

(4) v_0 の速さで水平面より θ下方から等速直線運動して近づいてくるように見える。(P5の説明参照)

問題プリント

従って求める時間は $\frac{L}{v_0}$ ← (2)と同じ

問題4 [空気抵抗]



(1). (右の図)

(2) $Ma = Mg\sin\theta - \mu' Mg\cos\theta - kv$

(3) $a = 0$ より $v_0 = \frac{Mg}{k}(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$

(4) $t=0$ のとき $v=0$ より

$M \times \frac{1}{3}g = Mg\sin 30^\circ - \mu' Mg\cos 30^\circ - k \cdot 0 \quad \therefore \mu' = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

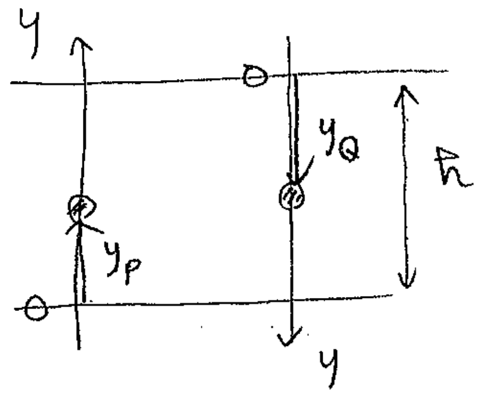
(5) 終端速度になったとき

$0 = Mg\sin 30^\circ - \mu' Mg\cos 30^\circ - 4k. \quad k = \frac{1}{12}Mg$

問題5 [軸のとり方]

(1) 解法が3つあります。全てできるようにしてください

[解法I]



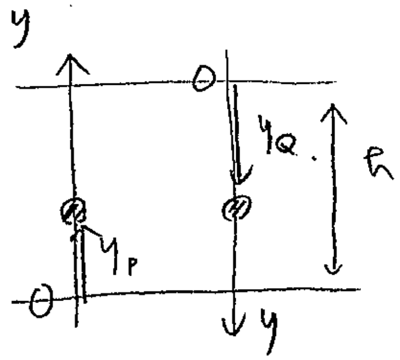
$$y_P + y_Q = h$$

$$\left(v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2\right) + \frac{1}{2} g t_1^2 = h$$

$$t_1 = \frac{h}{v_0} \quad h_1 = v_0 \cdot \frac{h}{v_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{h}{v_0}\right)^2$$

$$= h - \frac{g h^2}{2 v_0^2}$$

[解法II]



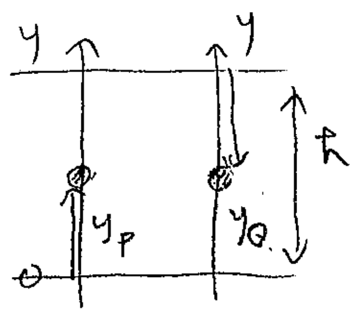
Qの高さは $h - y_Q$ で表されるから

$$y_P = h - y_Q$$

$$v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = h - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad t_1 = \frac{h}{v_0}$$

以下同じ…

[解法III]



QもPと同じ座標系で表すと、

$$y_Q = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$y_P = y_Q$ より

$$v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = h - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \therefore t_1 = \frac{h}{v_0}$$

以下同じ…

(2) [解法III]と同様に、Pと同じ座標系でQを表すと、

P、Qの速度はそれぞれ

$$v_P = v_0 - g t, \quad v_Q = -g t$$

$$\therefore v_1 = v_P - v_Q \quad (\leftarrow 相対速度)$$

$$= (v_0 - g t_1) - (-g t_1)$$

$$= v_0$$

問題6 [斜面上への物体の投射]

(1) $x = v_0 \cos\theta \cdot t$, $\quad y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ //

(2) $y = -\tan\alpha \cdot x$ //

(3) (1), (2), $t > 0$ より

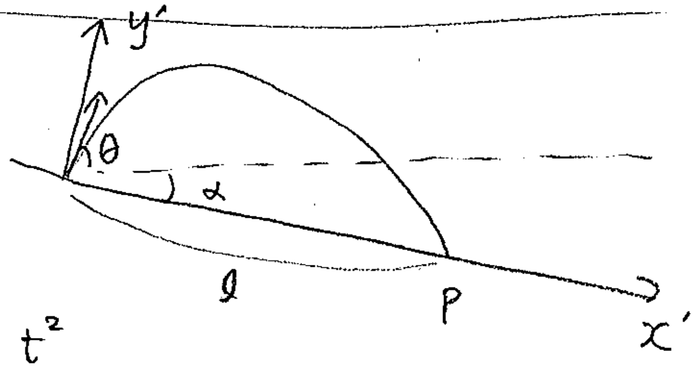
$$t = \frac{2v_0}{g}(\sin\theta + \cos\theta\tan\alpha)$$
$$= \frac{2v_0}{g} \cdot \frac{\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$= \frac{2v_0}{g\cos\alpha}\sin(\theta+\alpha) \quad //$$

(4) $l\cos\alpha = x = v_0\cos\theta \cdot t$ より

$$l = \frac{v_0\cos\theta}{\cos\alpha} \cdot t = \frac{v_0\cos\theta}{\cos\alpha} \cdot \frac{2v_0}{g\cos\alpha}\sin(\theta+\alpha)$$
$$= \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}{g\cos^2\alpha} = \frac{v_0^2\{\sin(2\theta+\alpha)+\sin\alpha\}}{g\cos^2\alpha} \quad //$$

(5) α と v_0 は一定だから
l が最大となるためには
$\sin(2\theta+\alpha) = 1$ となれば良い
$2\theta_m + \alpha = 90^\circ$
$$\theta_m = \frac{90^\circ - \alpha}{2} \quad //$$
$$l_m = \frac{v_0^2(1+\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha} \quad //$$

(3)(4) 別解



右図のように斜面に沿ってx'軸を、
それと垂直にy'軸をとると
時刻tにおける物体の位置x', y'は、

$$x' = v_0\cos(\theta+\alpha)\cdot t + \frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2$$
$$y' = v_0\sin(\theta+\alpha)\cdot t - \frac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t^2$$

$y' = 0$ より (← これがやりたかった!!)

$$t = \frac{2v_0\sin(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha}$$
$$l = v_0\cos(\theta+\alpha)\cdot\frac{2v_0\sin(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha} + \frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot\frac{4v_0^2\sin^2(\theta+\alpha)}{g^2\cos^2\alpha}$$
$$= \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}\{\cos\alpha\cdot\cos(\theta+\alpha) + \sin\alpha\cdot\sin(\theta+\alpha)\}$$
$$= \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}\cdot\cos\theta = \frac{v_0^2\{\sin(2\theta+\alpha)+\sin\alpha\}}{g\cos^2\alpha} \quad //$$