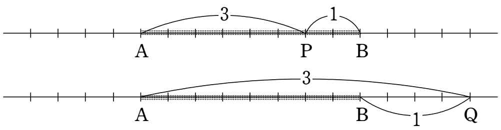
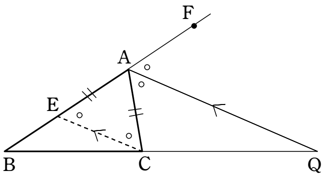
第２章　図形の性質

問・練習（第１節）

練習１
点 P，点 Q は，それぞれ図のようになる。



問１
C を通り AQ に平行な直線と辺 AB との交点を E とし，辺 BA の A を越える延長上に点 F をとると



　$\angle\mathrm{ACE}=\angle\mathrm{CAQ}$

　$\angle\mathrm{AEC}=\angle\mathrm{FAQ}=\angle\mathrm{CAQ}$

ゆえに，$\angle\mathrm{ACE}=\angle\mathrm{AEC}$ から

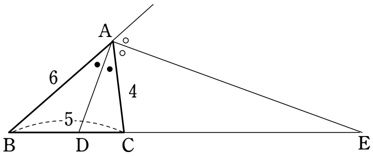
　　$\mathrm{AE}=\mathrm{AC}$

$\mathrm{AQ}/\!/\mathrm{EC}$ であるから　　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\mathrm{BA}:\mathrm{AE}$

ゆえに　　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$

練習２
　　$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=6:4=3:2$

AD は $\angle\mathrm{A}$ の二等分線であるから



　$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}$

$=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$

すなわち

　$(5-\mathrm{DC}):\mathrm{DC}=3:2$

よって　　$2(5-\mathrm{DC})=3\mathrm{DC}$

これを解いて　　$\mathrm{DC}=2$

また，AE は頂点 A における外角の二等分線であるから　　$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$

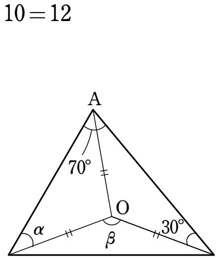
すなわち　$(5+\mathrm{EC}):\mathrm{EC}=3:2$

よって　　$2(5+\mathrm{EC})=3\mathrm{EC}$

これを解いて　　$\mathrm{EC}=10$

ゆえに　　$\mathrm{DE}=\mathrm{DC}+\mathrm{CE}=2+10=12$

練習３
点 O は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心であるから



　　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

よって，$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{OCA}$ は二等辺三角形である。

ゆえに

　$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OCA}=30^\circ$

　$\angle\mathrm{OAB}=70^\circ-\angle\mathrm{OAC}=40^\circ$

$\alpha=\angle\mathrm{OAB}$ であるから　　$\alpha=40^\circ$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の内角の和は 180° であるから

$$70^\circ+40^\circ+30^\circ+\angle\mathrm{OBC}+\angle\mathrm{OCB}=180^\circ$$

よって　　$\angle\mathrm{OBC}+\angle\mathrm{OCB}=40^\circ$

$\triangle\mathrm{OBC}$ の内角の和も 180° であるから

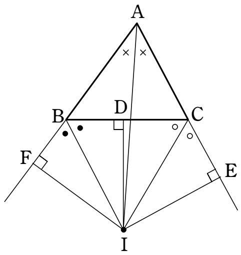
$$\beta=180^\circ-(\angle\mathrm{OBC}+\angle\mathrm{OCB})$$
$$=180^\circ-40^\circ=140^\circ$$

$\boxed{\text{別解}}$（後半）$\triangle\mathrm{ABC}$ は点 O を中心とし，半径 OA の円に内接する。

よって，円周角の定理により

$$\beta=2\angle\mathrm{BAC}=2\times70^\circ=140^\circ$$

練習４
I から辺 BC，CA，AB またはその延長に，それぞれ垂線 ID，IE，IF を下ろす。



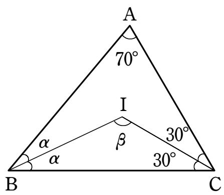
このとき

　　$\mathrm{ID}=\mathrm{IE}$，$\mathrm{ID}=\mathrm{IF}$

よって　　$\mathrm{IE}=\mathrm{IF}$

ゆえに，I は $\angle\mathrm{A}$ の二等分線上にある。

練習５
点 I は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心であるから　$\angle\mathrm{IBC}=\angle\mathrm{IBA}=\alpha$



　　$\angle\mathrm{ICB}=\angle\mathrm{ICA}=30^\circ$

よって

　$2\alpha+70^\circ+30^\circ\times2=180^\circ$

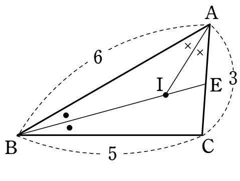
ゆえに　　$\alpha=25^\circ$

また　$\beta=180^\circ-(\alpha+30^\circ)$

　　$=180^\circ-(25^\circ+30^\circ)$

　　$=125^\circ$

練習６
$\triangle\mathrm{ABC}$ において，BE は $\angle\mathrm{B}$ の二等分線であるから



　$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=\mathrm{BA}:\mathrm{BC}=6:5$

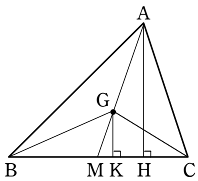
ゆえに

$$\mathrm{AE}=\frac{6}{11}\mathrm{AC}=\frac{18}{11}$$

A と I を結ぶと，$\triangle\mathrm{ABE}$ において，AI は $\angle\mathrm{A}$ の二等分線であるから

$$\mathrm{BI}:\mathrm{IE}=\mathrm{AB}:\mathrm{AE}=6:\frac{18}{11}=11:3$$

練習７
(1)　辺 BC の中点を M とする。



　$\mathrm{AH}/\!/\mathrm{GK}$ であるから

　　$\mathrm{AH}:\mathrm{GK}=\mathrm{AM}:\mathrm{GM}$

　G は $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるから

　　$\mathrm{AG}:\mathrm{GM}=2:1$

　よって　　$\mathrm{AM}:\mathrm{GM}=3:1$

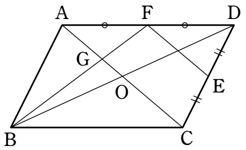
　ゆえに　　$\mathrm{AH}:\mathrm{GK}=3:1$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{GBC}$ において，辺 BC を共通の底辺とみると，高さはそれぞれ AH，GK である。

したがって，面積比 △ABC : △GBC は，高さの比 AH : GK に等しく

$$△ABC : △GBC=3:1$$

練習８



重心の性質より　AF＝FD

また，DE＝CE であるから，中点連結定理により

AC＝2FE＝2×12＝24

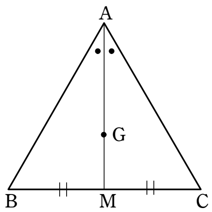
平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とすると，AO＝CO より

$$AO=24\times\frac{1}{2}=12$$

また，BO＝DO であるから，重心の性質より，G は線分 AO 上にある。

AG : GO＝2 : 1 より　　$AG=12\times\dfrac{2}{2+1}=8$

練習９



△ABC の重心と内心が，点 G で一致したとする。

AG と BC の交点を M とすると，G は重心であるから

BM＝CM

ここで，G は内心であるから，AG は ∠BAC の二等分線である。

よって　AB : AC＝BM : MC＝1 : 1

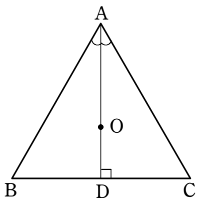
ゆえに　　　　AB＝AC　…… ①

同様にして　　BA＝BC　…… ②

①，② から　　AB＝BC＝CA

ゆえに，重心と内心が一致する三角形は，正三角形である。

(p.79) 研究　練習１



△ABC の内心と垂心が，点 O で一致したとする。

AO と辺 BC の交点を D とすると，O は内心であるから

∠BAD＝∠CAD

また，O は垂心であるから

AD⊥BC

よって，△ABD≡△ACD であるから

AB＝AC　…… ①

同様にして　　BA＝BC　…… ②

①，② から　　AB＝BC＝CA

ゆえに，内心と垂心が一致する三角形は，正三角形である。

練習１０

(1)　△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad すなわち \quad \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

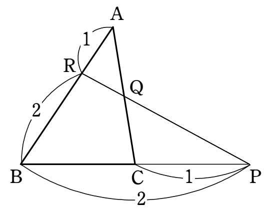
$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{2}{3}$ より　　AR : RB＝2 : 3

(2)　△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad すなわち \quad \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{5}{8}$ より　　AR : RB＝5 : 8

練習１１



(1)　△ABC と直線 PR にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\dfrac{CQ}{QA}=1$ より　　CQ : QA＝1 : 1

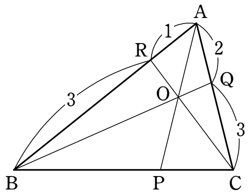
(2)　△PRB と直線 AC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{PQ}{QR}\cdot\frac{RA}{AB}\cdot\frac{BC}{CP}=1$$

すなわち　$\dfrac{PQ}{QR}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1}=1$

$\dfrac{PQ}{QR}=3$ より　　PQ : QR＝3 : 1

練習１２



(1)　△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$$

$\dfrac{BP}{PC}=2$ より

BP : PC＝2 : 1

(2)　(1) より　　BC : CP＝3 : 1

よって，△ABP と直線 CR にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad すなわち \quad \frac{3}{1}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{1}{3}=1$$

$\dfrac{PO}{OA}=1$ より　　PO : OA＝1 : 1

よって　　PO : PA＝1 : 2

△OBC と △ABC において，辺 BC を共通の底辺とみると，高さの比は PO : PA に等しい。

したがって，面積比 △OBC : △ABC は，PO : PA に等しく　　△OBC : △ABC＝1 : 2

(p.83) 研究　練習１

(1)　$6=4+2$ より，三角形は存在しない。

(2)　$15>8+5$ より，三角形は存在しない。

(3)　$|7-3|<8<7+3$ より，三角形は存在する。

(p.84) 研究　練習２

$\triangle ABC$ において，$\angle A=90^\circ$ とすると，
$\angle B+\angle C=90^\circ$ であるから

$$\angle B<90^\circ,\ \angle C<90^\circ$$

よって，$\angle A>\angle B$ であるから　　$BC>AC$

　　　$\angle A>\angle C$ であるから　　$BC>AB$

ゆえに，直角三角形では，斜辺が最も大きい。

練習１３

(1)　円周角の定理により　　$\angle ABD=\angle ACD=66^\circ$

線分 BD は円の直径であるから　　$\angle BAD=90^\circ$

$\triangle ABD$ の内角の和は 180° であるから

$$\theta=180^\circ-(90^\circ+66^\circ)=24^\circ$$

(2)　$\triangle OAB$ は $OA=OB$ の二等辺三角形であるから

$$\angle OAB=\angle OBA=62^\circ$$

$\triangle OAB$ の内角の和は 180° であるから

$$\angle AOB=180^\circ-62^\circ\times 2=56^\circ$$

円周角の定理により　　$\theta=\dfrac{1}{2}\angle AOB=28^\circ$

練習１４

(1)　A と D は直線 BC に関して同じ側にあり，
$\angle BAC=\angle BDC$ であるから，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

よって，円周角の定理により　　$\theta=\angle ACB=35^\circ$

(2)　$\triangle ACD$ の内角の和は 180° であるから

$$\angle ACD=180^\circ-(90^\circ+35^\circ)=55^\circ$$

よって，B と C は直線 AD に関して同じ側にあり，
$\angle ABD=\angle ACD$ であるから，
円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

よって，円周角の定理により

$$\angle CBD=\angle CAD=35^\circ$$

また　　$\angle BEA=\angle EBC+\angle ECB$

よって　　$63^\circ=35^\circ+\theta$

ゆえに　　$\theta=28^\circ$

練習１５

(1)　$\triangle ABC$ において　　$\angle B=180^\circ-(62^\circ+30^\circ)=88^\circ$

四角形 ABDE は円に内接しているから

$\theta=\angle B$　　　　よって　$\theta=88^\circ$

(2)　$\triangle PCD$ の外角から

$$\angle ADQ=\theta+25^\circ$$

四角形 ABCD は円に内接しているから

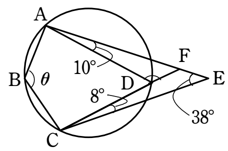
$$\angle QAD=\theta$$

よって，$\triangle QAD$ において

$$51^\circ+\theta+(\theta+25^\circ)=180^\circ$$

ゆえに　　$\theta=52^\circ$

(3)　直線 CD と AE の交点を F とすると，$\triangle ECF$ の外角から



$$\angle AFD=8^\circ+38^\circ=46^\circ$$

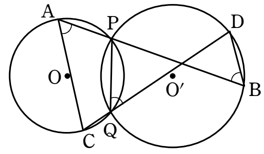
四角形 ABCD は円に内接しているから

$$\angle ADF=\theta$$

よって，$\triangle ADF$ において　　$10^\circ+\theta+46^\circ=180^\circ$

ゆえに　　$\theta=124^\circ$

練習１６



四角形 ACQP は円 O に内接しているから

$\angle PAC=\angle PQD$　　…… ①

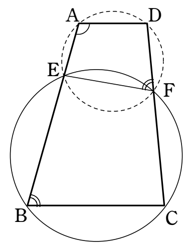
円 O′ において，円周角の定理により

$\angle PQD=\angle PBD$　…… ②

①，② から　　$\angle PAC=\angle PBD$

ゆえに　　$AC /\!/ DB$

練習１７



$AD /\!/ BC$ から

$\angle EBC+\angle EAD=180^\circ$　　…… ①

また，四角形 EBCF が円に内接するから

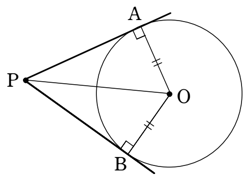
$\angle EBC=\angle EFD$　…… ②

①，② から，四角形 AEFD において

$$\angle EFD+\angle EAD=180^\circ$$

よって，四角形 AEFD は円に内接する。

問２



右の図の $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ において

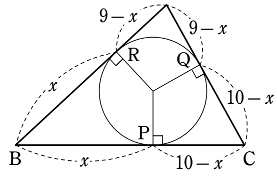
OP は共通，$OA=OB$，

$\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$

よって　$\triangle OAP\equiv\triangle OBP$

ゆえに　$PA=PB$

練習１８



$BP=x$ とする。

$BR=BP$ から　$BR=x$

よって

$AR=AB-BR=9-x$

$AQ=AR$ から

$AQ=9-x$　…… ①

また

$CP=BC-BP=10-x$

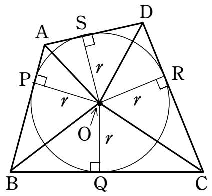
$CQ=CP$ から　　$CQ=10-x$　…… ②

ここで，$AQ+CQ=7$ であるから，①，② により

$$(9-x)+(10-x)=7$$

これを解いて　　$x=6$　　　　よって　$BP=6$

練習１９
円 O の半径を r とすると
$OP=OQ=OR=OS=r$
また　$OP\perp AB$，$OQ\perp BC$，
$OR\perp CD$，$OS\perp DA$



よって

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot OP\cdot AB$$
$$=\frac{1}{2}r\cdot AB$$
$$\triangle OBC=\frac{1}{2}\cdot OQ\cdot BC=\frac{1}{2}r\cdot BC$$
$$\triangle OCD=\frac{1}{2}\cdot OR\cdot CD=\frac{1}{2}r\cdot CD$$
$$\triangle ODA=\frac{1}{2}\cdot OS\cdot DA=\frac{1}{2}r\cdot DA$$

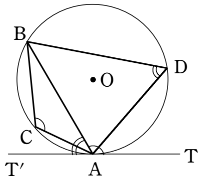
ゆえに　$\triangle OAB+\triangle OCD=\frac{1}{2}r(AB+CD)$

$\triangle OBC+\triangle ODA=\frac{1}{2}r(BC+DA)$

したがって，$AB+CD=BC+DA$ より

$\triangle OAB+\triangle OCD=\triangle OBC+\triangle ODA$

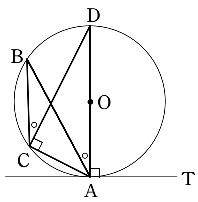
問３
$\angle BAT$ が鈍角の場合，右の図のように，TA の A を越える延長上に T′ をとり，C を含まない弧 BA 上に点 D をとると，$\angle ADB$ は鋭角で



$\angle BAT'=\angle ADB$
$\angle ACB+\angle ADB=180°$
$\angle BAT'+\angle BAT=180°$

よって　$\angle BAT=\angle ACB$

(別証)　$\angle BAT$ が鈍角の場合，右の図のように A を通る直径を AD とし，D と C を結ぶと

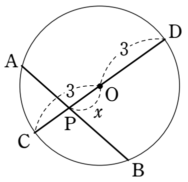


$\angle BAT=\angle BAD+90°$
また，AD が直径であるから
$\angle ACB=\angle BCD+90°$
円周角の定理により
$\angle BAD=\angle BCD$
よって　$\angle BAT=\angle ACB$

練習２０
(1)　$\theta=50°$
(2)　$CA=CB$ であるから　$\angle CAB=\angle CBA$
また　$\angle ABC=65°$
よって　$\theta=180°-(65°+65°)=50°$
(3)　$AD/\!/BC$ であるから　$\angle CBD=\angle BDA=55°$
$\angle BCD=180°-\angle DAB$
$=180°-(180°-40°-55°)=95°$
よって　$\theta=180°-(55°+95°)=30°$

練習２１
(1)　方べきの定理により　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$
よって　$5\cdot x=7\cdot 3$
ゆえに　$x=\frac{21}{5}$
(2)　方べきの定理により　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$
よって　$2\cdot(2+3)=\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+x)$
ゆえに　$x=\sqrt{5}$

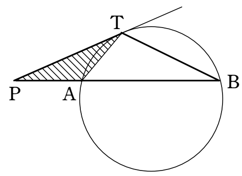
練習２２
右の図のように，直線 OP と円 O の交点を C，D とする。



方べきの定理により
$PA\cdot PB=PC\cdot PD$
よって　$PC\cdot PD=7$　…… ①
$OP=x$ とおくと
$PC=3-x$，$PD=3+x$
これを ① に代入して　$(3-x)(3+x)=7$
ゆえに　$x^2=2$　$x>0$ であるから　$x=\sqrt{2}$
したがって　$OP=\sqrt{2}$

練習２３
方べきの定理により
$PA\cdot PB=PC\cdot PD$　…… ①
また，円の中心から弦に下ろした垂線は，その弦を 2 等分するから
$PA=PB$　…… ②
①，② から　$PC\cdot PD=PA^2$

問４
$\triangle PTA$ と $\triangle PBT$ において，直線 PT は円の接線であるから



$\angle PTA=\angle PBT$
$\angle P$ は共通
よって　$\triangle PTA\backsim\triangle PBT$
ゆえに　$PT:PB=PA:PT$
したがって　$PA\cdot PB=PT^2$

練習２４
PT，PT′ は，それぞれ円の接線であるから，方べきの定理により
$PT^2=PA\cdot PB$，$PT'^2=PA\cdot PB$
よって　$PT^2=PT'^2$　ゆえに　$PT=PT'$

練習２５
AB，DE は C で交わるから，方べきの定理により
$CA\cdot CB=CD\cdot CE$　…… ①
また，$\angle OAP=\angle OBP=90°$ であるから，4 点 O，A，P，B は 1 つの円周上にある。
よって，方べきの定理により
$CA\cdot CB=CP\cdot CO$　…… ②
①，② から　$CD\cdot CE=CP\cdot CO$
ゆえに，方べきの定理の逆により，4 点 P，O，D，E は 1 つの円周上にある。

練習２６

[1]　d $\boxed{>}$ $r+r'$　　[2]　d $\boxed{=}$ $r+r'$

[3]　$r-r'$ $\boxed{<}$ d $\boxed{<}$ $r+r'$

[4]　d $\boxed{=}$ $r-r'$　　[5]　d $\boxed{<}$ $r-r'$

練習２７

(1)　点 O′ から線分 OA に垂線 O′H を下ろすと，四角形 ABO′H は長方形となり

$AB=HO'$,

$HA=O'B$

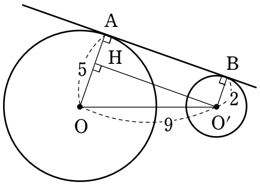
よって

$OH=OA-HA=5-2=3$

直角三角形 OO′H に三平方の定理を適用すると

$$HO'=\sqrt{OO'^2-OH^2}$$
$$=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

したがって　　$AB=6\sqrt{2}$



(2)　点 O′ から線分 OA の延長に垂線 O′H を下ろすと，四角形 ABO′H は長方形となり

$AB=HO'$,

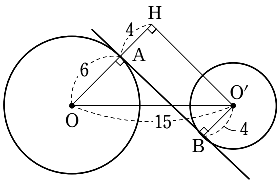
$HA=O'B$

よって　　$OH=OA+HA=6+4=10$

直角三角形 OO′H に三平方の定理を適用すると

$$HO'=\sqrt{OO'^2-OH^2}$$
$$=\sqrt{15^2-10^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$$

したがって　　$AB=5\sqrt{5}$



練習２８

右の図のように，点 P における 2 つの円の共通接線 EF を引くと，接線と弦の作る角の関係から

$\angle CPE=\angle CDP=53^\circ$

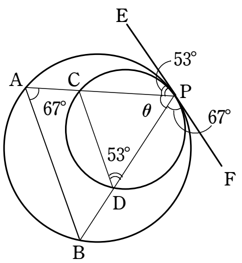
$\angle BPF=\angle BAP=67^\circ$

よって

$\theta=180^\circ-(\angle CPE+\angle BPF)$

$=180^\circ-(53^\circ+67^\circ)$

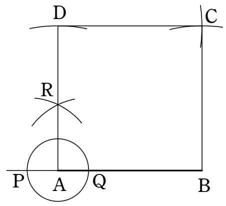
$=60^\circ$



練習２９

①　点 A を中心とする円をかき，直線 AB との交点を，それぞれ P，Q とする。

②　2 点 P，Q をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかき，それらの交点の 1 つを R とする。



③　点 A を中心とする半径 AB の円をかき，直線 AR との交点の 1 つを D とする。

④　2 点 B，D をそれぞれ中心として，半径 AB の円をかき，それらの交点のうち A でない方を C とする。四角形 ABCD が求める正方形である。

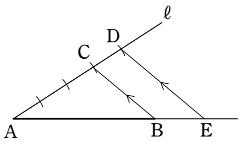
このとき，四角形 ABCD において，∠DAB は直角で，4 辺が等しい。

したがって，四角形 ABCD は正方形である。

問５

①　A を通り，直線 AB と異なる直線 ℓ を引く。

②　ℓ 上に，AC : CD＝3 : 1 となるような点 C，D をとる。ただし，C は線分 AD 上にとる。



③　D を通り，BC に平行な直線を引き，直線 AB との交点を E とする。点 E が求める点である。

このとき，BC∥ED から

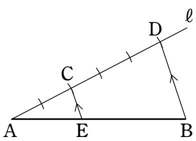
$$AE : EB=AD : DC=4 : 1$$

したがって，点 E は線分 AB を 4 : 1 に外分する点である。

練習３０

(1)　①　A を通り，直線 AB と異なる直線 ℓ を引く。

②　ℓ 上に，AC : CD＝2 : 3 となるような点 C，D をとる。ただし，C は線分 AD 上にとる。



③　C を通り，BD に平行な直線を引き，線分 AB との交点を E とする。点 E が求める点である。

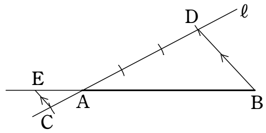
このとき，EC∥BD から

$$AE : EB=AC : CD=2 : 3$$

したがって，点 E は線分 AB を 2 : 3 に内分する点である。

(2)　①　A を通り，直線 AB と異なる直線 ℓ を引く。

②　ℓ 上に，CA : AD＝1 : 3 となるような点 C，D をとる。ただし，A が線分 CD 上にあるようにとる。



③　C を通り，BD に平行な直線を引き，直線 AB との交点を E とする。点 E が求める点である。

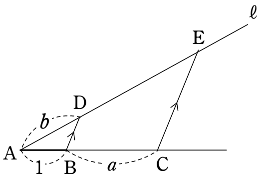
このとき，CE∥BD から

$$AE : EB = AC : CD = 1 : 4$$

したがって，点 E は線分 AB を 1 : 4 に外分する点である。

練習３１

① A を通り，直線 AB と異なる直線 ℓ を引く。



② 線分 AB の B を越える延長上に，BC$=a$ となるような点 C をとり，ℓ 上に，AD$=b$ となるような点 D をとる。

③ C を通り，BD に平行な直線を引き，ℓ との交点を E とする。線分 DE が求める線分である。

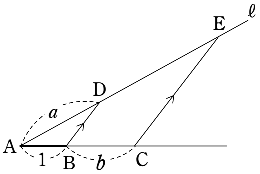
このとき，DE$=x$ とすると，BD∥CE から

$$1 : a = b : x \quad \text{すなわち} \quad x = ab$$

したがって，線分 DE は長さ ab の線分である。

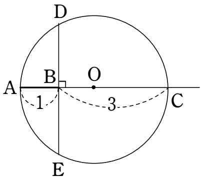
別解　② において，

BC$=b$，AD$=a$ としてもよい。



練習３２

① 線分 AB の B を越える延長上に，BC$=3$ となる点 C をとる。



② 線分 AC を直径とする円 O をかく。

③ B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする。線分 BD が求める線分である。

このとき，方べきの定理により　　BA・BC$=$BD・BE

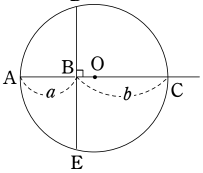
AB$=1$，BC$=3$，BD$=$BE であるから　　BD$^2=3$

したがって，線分 BD は長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

参考　1 辺の長さが 2 である正三角形 ABC を作図し，頂点 A から辺 BC に垂線 AD を下ろすと，線分 AD は長さ $\sqrt{3}$ の線分である。このように求めてもよい。

練習３３

① 長さ a の線分を AB とし，線分 AB の B を越える延長上に，BC$=b$ となる点 C をとる。



② 線分 AC を直径とする円 O をかく。

③ B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする。線分 BD が求める線分である。

このとき，方べきの定理により　　BA・BC$=$BD・BE

AB$=a$，BC$=b$，BD$=$BE であるから　　BD$^2=ab$

したがって，線分 BD は長さ $\sqrt{ab}$ の線分である。

(p.102) 研究　練習１

(1) 正五角形は円に内接し，CD$=$BC から，円周角の定理により

$$\angle CAD = \angle BDC$$

よって　$\angle CAD = \angle FDC$

同様に，円周角の定理により，$\angle CAD$，$\angle ADB$，$\angle ACE$，$\angle ECD$ はすべて等しいから

$$\begin{aligned}\angle DFC &= \angle CAD + \angle ADB \\ &= \angle ACE + \angle ECD \\ &= \angle ACD\end{aligned}$$

△ACD と △DFC において，2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACD \backsim \triangle DFC$$

(2) △AFD，△DFC はともに二等辺三角形であり

$$FA = FD = CD = 1$$

よって　FC$=$AC$-$FA$=x-1$

△ACD∽△DFC より，AC : DF$=$CD : FC であるから

$$x : 1 = 1 : (x-1)$$

(3) $x : 1 = 1 : (x-1)$ から　　$x(x-1)=1^2$

整理して　　$x^2-x-1=0$

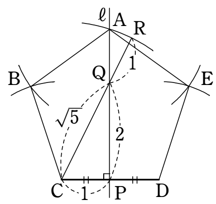
これを解くと　　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ から　　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって　CD : AC$=1 : x = 1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(p.102) 研究　練習２

⑤ A を中心として半径 2 の円，C を中心として半径 2 の円をかき，それらの交点のうち AC に関して D の反対側にあるものを B とする。



⑥ A を中心として半径 2 の円，D を中心として半径 2 の円をかき，それらの交点のうち AD に関して C の反対側にあるものを E とする。

五角形 ABCDE が求める正五角形である。

問題（p.103，p.104）

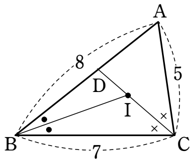
問題１

(1)　△ABCにおいて，CDは∠Cの二等分線であるから

$BD : DA = CB : CA = 7 : 5$

ゆえに

$BD = \frac{7}{12}BA = \frac{7}{12} \cdot 8 = \frac{14}{3}$



BとIを結ぶと，△BCDにおいて，BIは∠Bの二等分線であるから

$CI : ID = BC : BD = 7 : \frac{14}{3} = 3 : 2$

(2)　△DBCと△DBIにおいて，辺BDを共通の底辺とみると，高さの比はCD : IDに等しい。

CI : ID＝3 : 2から　　CD : ID＝5 : 2

よって　　$\triangle DBI = \frac{2}{5}\triangle DBC$

また，△ABCと△DBCにおいて，辺BCを共通の底辺とみると，高さの比はAB : DBに等しい。

AD : DB＝5 : 7から　　AB : DB＝12 : 7

よって　　$\triangle DBC = \frac{7}{12}\triangle ABC$

ゆえに

$\triangle DBI = \frac{2}{5}\triangle DBC = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12}\triangle ABC = \frac{7}{30}\triangle ABC$

したがって

$\triangle ABC : \triangle DBI = \triangle ABC : \frac{7}{30}\triangle ABC = 30 : 7$

問題２

(1)　AD，BEが△ABCの中線であるから，Fは△ABCの重心であり

$BF : FE = 2 : 1$

よって　　$FE = \frac{1}{3}BE = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$

(2)　FE，CGが△AFCの中線であるから，Hは△AFCの重心であり

$FH : HE = 2 : 1$

よって　　$FH = \frac{2}{3}FE = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$

問題３

(1)　弧BDに対する円周角より

$\angle BAD = \angle BCD = \beta$

また，∠ABC＋∠BAD＝80°であるから

$\alpha + \beta = 80°$　……①

一方，∠ABC＋∠APC＝∠BCDであるから

$\alpha + 40° = \beta$　……②

①，②から　　$\alpha = 20°$，$\beta = 60°$

(2)　$\angle ACB = 180° - (\angle CAB + \angle CBA)$

$= 180° - (70° + 48°) = 62°$

接線と弦の作る角の関係から

$\angle BAP = \angle ACB = 62°$

$\angle ABP = \angle BCA = 62°$

ゆえに　　$\alpha = 180° - (\angle BAP + \angle ABP)$

$= 180° - (62° + 62°) = 56°$

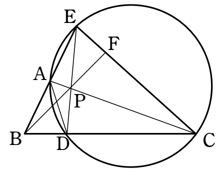
問題４

(1)　方べきの定理により　　$BD \cdot BC = BA \cdot BE$

すなわち　　$3 \cdot 12 = 4 \cdot (4 + AE)$

これを解くと　　$AE = 5$

(2)　△EBCにチェバの定理を用いると



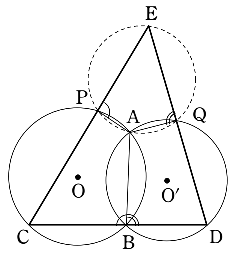
$\frac{EA}{AB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CF}{FE} = 1$

すなわち　$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{CF}{FE} = 1$

よって　　$\frac{CF}{FE} = \frac{12}{5}$

問題５

四角形PCBA，ABDQは，それぞれ円O，O′に内接するから



$\angle ABC = \angle APE$

$\angle ABD = \angle AQE$

よって

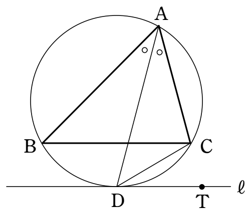
$\angle APE + \angle AQE$

$= \angle ABC + \angle ABD = 180°$

したがって，四角形EPAQは円に内接する。

問題６

右の図のように，直線ℓ上に点Tをとると，ℓは円の接線であるから



$\angle CDT = \angle DAC$

また　$\angle DAC = \angle BAD$

円周角の定理により

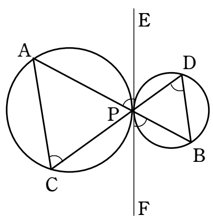
$\angle BAD = \angle BCD$

よって　$\angle CDT = \angle BCD$

錯角が等しいから　　ℓ∥BC

問題７

右の図のように，点Pにおける共通接線EFを引くと



$\angle EPA = \angle ACP$

$\angle FPB = \angle BDP$

∠EPA＝∠FPBであるから

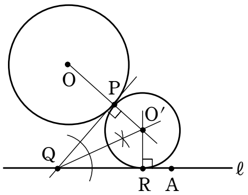
$\angle ACP = \angle BDP$

錯角が等しいから

AC∥DB

問題８

① 点 P を通り直線 OP に垂直な直線を引き，ℓ との交点を Q とする。
② ℓ 上の点で Q より右側にあるものを A とする。$\angle$PQA の二等分線を引き，直線 OP との交点を O′ とする。



③ 点 O′ を中心とする半径 O′P の円をかく。
この円が求める円である。

このとき，O′ から ℓ に垂線を下ろし，ℓ との交点を R とする。直線 QO′ は $\angle$PQR の二等分線であるから

$$O'P=O'R$$

よって，点 R は円 O′ の周上の点であり，$O'R\perp\ell$ であるから，円 O′ は直線 ℓ に点 R で接する。
また，③ から，円 O′ は円 O に外接する。

問・練習（第２節）

練習３４

(1) 辺 BE，辺 CF　　(2) 辺 BC，辺 EF

練習３５

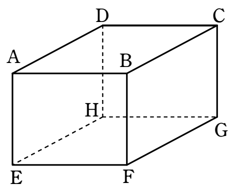
(1) 90°　(2) 45°　(3) 90°

練習３６

(1) 正三角形 ACD において，AM$\perp$CD であり，正三角形 BCD において，BM$\perp$CD である。
よって，辺 CD は平面 ABM 上の 2 直線 AM，BM に垂直であるから，辺 CD は平面 ABM に垂直である。
(2) (1) から，辺 CD は平面 ABM 上のすべての直線に垂直である。
辺 AB は平面 ABM 上にあるから　　AB$\perp$CD

練習３７

(1) 正しくない。
右の図のような直方体において，
(面 ABCD)$\perp$(面 AEFB)，
(面 AEFB)$\perp$(面 BFGC)
であるが，面 ABCD と面 BFGC は平行でない。



(2) 正しい。
(3) 正しくない。
(1) の直方体において，
AB$\perp$BC，AB$/\!/$(面 EFGH)
であるが，BC と 面 EFGH は垂直でない。
(4) 正しくない。
(1) の直方体において，
AB$/\!/$(面 EFGH)，AB$/\!/$(面 DHGC)
であるが，面 EFGH と面 DHGC は平行でない。
(5) 正しい。

(p.109) 研究　練習１

(1) $\triangle$ACD と $\triangle$BCD において
辺 CD が共通，　AC＝BC，　AD＝BD
3 組の辺がそれぞれ等しいから
$\triangle ACD\equiv\triangle BCD$
(2) (1) から　　$\angle ACE=\angle BCE$
$\triangle$ACE と $\triangle$BCE において
辺 CE が共通，　AC＝BC，　$\angle ACE=\angle BCE$
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
$\triangle ACE\equiv\triangle BCE$
(3) (2) から　　$\angle AEC=\angle BEC=90^\circ$
よって　　AE$\perp$CD
また　　HE$\perp$CD，AH$\perp$HE
したがって，三垂線の定理から，AH は平面 BCD に垂直である。

練習３８

正多面体	面の数	面の形	1 頂点に集まる面の数	頂点の数	辺の数
正四面体	4	正三角形	3	4	6
正六面体	6	正方形	3	8	12
正八面体	8	正三角形	4	6	12
正十二面体	12	正五角形	3	20	30
正二十面体	20	正三角形	5	12	30

練習３９

正四面体　　$4-6+4=2$
正六面体　　$8-12+6=2$
正十二面体　　$20-30+12=2$
正二十面体　　$12-30+20=2$
よって，これらの正多面体についても，等式
$v-e+f=2$ が成り立つ。

練習４０

(1) 面の数 14，頂点の数 12，辺の数 24
(2) $12-24+14=2$ であるから，等式 $v-e+f=2$ が成り立つ。

練習４１

(1) 各面が正方形である正多面体の頂点，辺，面の数を，それぞれ v，e，f とする。
正方形の 1 つの角は 90° であることより，1 つの頂点に集まる面の数は 3 であるから　　$v=\dfrac{4f}{3}$　……①
1 つの辺に集まる面の数は 2 であるから

$$e=\frac{4f}{2}=2f \quad \cdots\cdots ②$$

①，② を $v-e+f=2$ に代入すると

$$\frac{4f}{3}-2f+f=2 \qquad よって \qquad f=6$$

したがって，各面が正方形である正多面体が存在すれば，その面の数は 6 である。
(2) 各面が正三角形である正多面体の頂点，辺，面の数を，それぞれ v，e，f とする。

正三角形の1つの角は60°であることより，1つの頂点に集まる面の数は3，4，5の場合がある。
1つの辺に集まる面の数は2であるから

$$e=\frac{3f}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　1つの頂点に集まる面の数が3のとき

$$v=\frac{3f}{3}=f \quad \cdots\cdots ②$$

①，②を $v-e+f=2$ に代入すると

$$f-\frac{3f}{2}+f=2$$

よって　　$f=4$

[2]　1つの頂点に集まる面の数が4のとき

$$v=\frac{3f}{4} \quad \cdots\cdots ③$$

①，③を $v-e+f=2$ に代入すると

$$\frac{3f}{4}-\frac{3f}{2}+f=2 \qquad よって \qquad f=8$$

[3]　1つの頂点に集まる面の数が5のとき

$$v=\frac{3f}{5} \quad \cdots\cdots ④$$

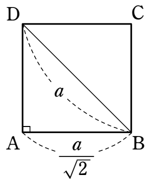
①，④を $v-e+f=2$ に代入すると

$$\frac{3f}{5}-\frac{3f}{2}+f=2 \qquad よって \quad f=20$$

[1]～[3]から，各面が正三角形である正多面体が存在すれば，その面の数は4か8か20である。

練習４２

正四面体BDEGの1辺の長さを a とすると，立方体ABCD−EFGHの1辺の長さは $\frac{a}{\sqrt{2}}$ である。



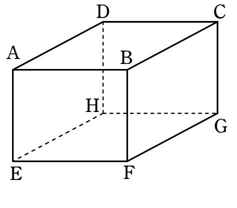
正四面体BDEGの体積は，立方体ABCD−EFGHの体積から4つの三角錐ABDE，FBEG，CBGD，HDEGの体積の和を引いた値であるから，求める正四面体の体積 V は

$$V=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\times 4=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

問題（p.114）

問題９

(1)　正しくない。
右の図のような直方体において，AB∥DCで，直線DCと直線GCは交わるが，直線ABと直線GCはねじれの位置にあり交わらない。



(2)　正しい。

(3)　正しくない。
上の図のような直方体において，直線ABと直線DCは平面ABCDに含まれ，AB⊥BC，DC⊥BCであるが，直線BCは平面ABCDに垂直でない。

問題１０

(1)　OA⊥OB，OA⊥OCであるから
　　OA⊥平面OBC
したがって　　OA⊥BC
また，OH⊥平面ABCであるから
　　OH⊥BC

(2)　(1)より，OA⊥BC，OH⊥BCであるから
　　平面OAH⊥BC
したがって　　AH⊥BC

問題１１

12個の正五角形の頂点の数は　5×12
20個の正六角形の頂点の数は　6×20
1つの頂点に3つの面が集まっているから，求める頂点の数は

$$\frac{5\times 12+6\times 20}{3}=60$$

12個の正五角形の辺の数は　5×12
20個の正六角形の辺の数は　6×20
1つの辺に2つの面が集まっているから，求める辺の数は

$$\frac{5\times 12+6\times 20}{2}=90$$

別解　頂点の数は，正五角形の頂点の総数に等しいから

$$5\times 12=60$$

辺の数を e とすると，オイラーの多面体定理により

$$60-e+(12+20)=2$$

よって　　$e=90$

問題１２

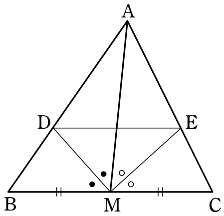
(1)　この立体は凸多面体で，各面がすべて合同な正三角形であり，各頂点に集まる面の数はすべて4で等しい。また，面の数は8である。
したがって，この立体は正八面体である。

(2)　1つのかどを切り取った立体は正四面体で，もとの正四面体との相似比は1：2であるから，その体積は $\frac{V}{2^3}$ である。
よって，求める立体の体積は

$$V-\frac{V}{2^3}\times 4=V-\frac{V}{2}=\frac{V}{2}$$

演習問題（p.115，p.116）

演習問題１



MD は ∠AMB の二等分線であるから

$\mathrm{MA}:\mathrm{MB}=\mathrm{AD}:\mathrm{DB}$ ……①

ME は ∠AMC の二等分線であるから

$\mathrm{MA}:\mathrm{MC}=\mathrm{AE}:\mathrm{EC}$ ……②

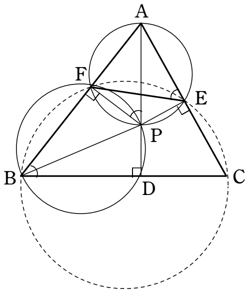
また　$\mathrm{MB}=\mathrm{MC}$ ……③

①，②，③ から

$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{AE}:\mathrm{EC}$

ゆえに　$\mathrm{DE}/\!/\mathrm{BC}$

演習問題２



(1)　四角形 AFPE において

$\angle\mathrm{AFP}=\angle\mathrm{AEP}=90^\circ$

であるから，四角形 AFPE は線分 AP を直径とする円に内接する。

よって，円周角の定理により

$\angle\mathrm{APF}=\angle\mathrm{AEF}$

(2)　四角形 FBDP において

$\angle\mathrm{BFP}=\angle\mathrm{BDP}=90^\circ$

であるから，四角形 FBDP は線分 BP を直径とする円に内接する。

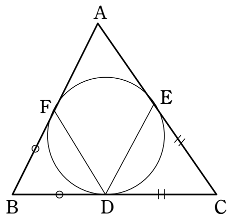
よって　$\angle\mathrm{APF}=\angle\mathrm{FBD}$

(3)　(1)，(2) から　$\angle\mathrm{AEF}=\angle\mathrm{FBD}$

すなわち　$\angle\mathrm{AEF}=\angle\mathrm{FBC}$

したがって，四角形 BCEF は円に内接する。

演習問題３



(1)　$\mathrm{BD}=\mathrm{BF}$ から

$\angle\mathrm{BDF}=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})$

$\mathrm{CD}=\mathrm{CE}$ から

$\angle\mathrm{CDE}=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle\mathrm{ACB})$

よって

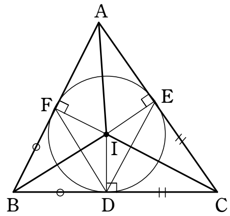
$\angle\mathrm{FDE}$

$=180^\circ-(\angle\mathrm{BDF}+\angle\mathrm{CDE})$

$=\dfrac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB})$

ゆえに　$2\angle\mathrm{FDE}=\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB}$

(別証)　(1)　△ABC の内心を I とする。



$\angle\mathrm{IFB}=\angle\mathrm{IDB}=90^\circ$ であるから，四角形 FBDI は円に内接する。

よって　$\angle\mathrm{FBI}=\angle\mathrm{FDI}$

同様に，四角形 IDCE は円に内接するから

$\angle\mathrm{IDE}=\angle\mathrm{ICE}$

また　$\angle\mathrm{FBI}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABC}$，　$\angle\mathrm{ICE}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ACB}$

よって　$\angle\mathrm{FDE}=\angle\mathrm{FDI}+\angle\mathrm{IDE}=\angle\mathrm{FBI}+\angle\mathrm{ICE}$

$=\dfrac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB})$

ゆえに　$2\angle\mathrm{FDE}=\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB}$

(2)　$\mathrm{AB}=\mathrm{AF}+\mathrm{BF}=\mathrm{AF}+\mathrm{BD}$

$\mathrm{AC}=\mathrm{AE}+\mathrm{CE}=\mathrm{AE}+\mathrm{CD}$

また　$\mathrm{AE}=\mathrm{AF}$

よって

$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}-\mathrm{BC}=(\mathrm{AF}+\mathrm{BD})+(\mathrm{AE}+\mathrm{CD})-\mathrm{BC}$

$=(\mathrm{AF}+\mathrm{AE})+(\mathrm{BD}+\mathrm{CD})-\mathrm{BC}$

$=2\mathrm{AF}+\mathrm{BC}-\mathrm{BC}=2\mathrm{AF}$

演習問題４

(1)　△EBC と直線 AF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DE}}\cdot\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AB}}=1$$

すなわち　$\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{a}{3b}\cdot\dfrac{2b}{3a}=1$

$\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{CF}}=\dfrac{9}{2}$ より　$\mathrm{BF}:\mathrm{CF}=9:2$

(2)　△EBC と △EDA において

∠E は共通，　$\angle\mathrm{EBC}=\angle\mathrm{EDA}$

よって　△EBC∽△EDA

したがって　$\mathrm{EB}:\mathrm{EC}=\mathrm{ED}:\mathrm{EA}=3b:2b=3:2$

(3)　△ABF と直線 CE にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}}\cdot\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}=1$$

すなわち　$\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{FD}}{\mathrm{DA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}=1$ ……①

ここで，$\mathrm{EB}:\mathrm{EC}=3:2$ から

$(2b+3a):(3b+a)=3:2$

よって　$2(2b+3a)=3(3b+a)$

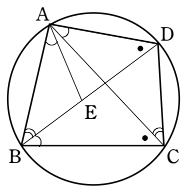
ゆえに　$3a=5b$

したがって　$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}=\dfrac{2b}{2b+3a}=\dfrac{2b}{2b+5b}=\dfrac{2}{7}$

よって，① から　$\dfrac{\mathrm{FD}}{\mathrm{DA}}=1$　すなわち　$\mathrm{FD}=\mathrm{DA}$

したがって　$\mathrm{DF}:\mathrm{AF}=1:2$

演習問題５



(1)　△ABE と △ACD において

$\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{CAD}$

$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{ACD}$

よって　△ABE∽△ACD

(2)　△ABC と △AED において

$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ADE}$

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BAE}+\angle\mathrm{EAC}$

$=\angle\mathrm{CAD}+\angle\mathrm{EAC}=\angle\mathrm{EAD}$

よって　△ABC∽△AED

(3)　(1) から　$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BE}:\mathrm{CD}$

すなわち　$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BE}$

(2) から　$BC : ED = AC : AD$

すなわち　$BC \cdot AD = AC \cdot ED$

よって

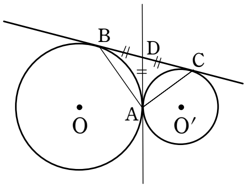
$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BE + AC \cdot ED = AC(BE + ED) = AC \cdot BD$$

演習問題６

点 A における共通接線を引き，直線 BC との交点を D とすると

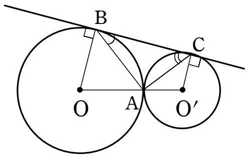
$DA = DB$，$DA = DC$

よって，点 D は $\triangle ABC$ の外心で，点 A は線分 BC を直径とする円周上にある。



したがって　$\angle BAC = 90°$

(別証)　右の図において



$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOB$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AO'C$$

$OB /\!/ O'C$ より

$\angle AOB + \angle AO'C = 180°$

よって　$\angle ABC + \angle ACB = 90°$

ゆえに，$\triangle ABC$ において

$\angle BAC = 180° - 90° = 90°$

演習問題７

(1)　I は $\triangle ABC$ の内心であるから　$\angle BAE = \angle DAC$

円周角の定理により　$\angle AEB = \angle ACD$

よって　$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$

ゆえに　$AB : AD = AE : AC$

よって　$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

ここで，$AE = AD + DE$ であるから

$AB \cdot AC = AD(AD + DE)$

よって　$AD^2 = AB \cdot AC - AD \cdot DE$　……①

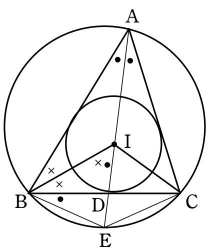
方べきの定理により

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$

これを①に代入して

$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

(2)　I は $\triangle ABC$ の内心であるから



$\angle BAE = \angle CAE$　……①

よって　$\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{EC}$

ゆえに　$EB = EC$　……②

円周角の定理により

$\angle EBC = \angle CAE$

これと①から

$\angle EBC = \angle BAE$　……③

また，I は $\triangle ABC$ の内心であるから

$\angle CBI = \angle IBA$　……④

③，④から

$$\angle IBE = \angle EBC + \angle CBI = \angle BAE + \angle IBA = \angle BIE$$

ゆえに　$EB = EI$　……⑤

②，⑤から　$EB = EC = EI$

(別証)　(2)　$\triangle EIB$ において

$$\angle IBE = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle EAC = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC$$

また

$$\angle BIE = \angle IBA + \angle IAB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC$$

ゆえに　$\angle IBE = \angle BIE$

よって　$EB = EI$　……①

同様にして，$\angle EIC = \angle ICE$ より

$EC = EI$　……②

①，②から　$EB = EC = EI$

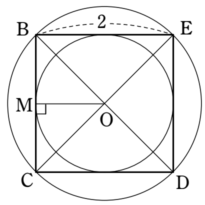
演習問題８

AF と平面 BCDE の交点を O とする。

四角錐 A−BCDE と四角錐 F−BCDE は，AF に垂直な平面 BCDE に関して対称であるから，AO を軸として四角錐 A−BCDE を 1 回転させたときの体積を考え，それを 2 倍すればよい。

(1)　AO を軸として四角錐 A−BCDE を 1 回転させたとき，内部が通過する部分の体積を V とする。V は，中心 O，半径 OB の円を底面とし A を頂点とする円錐の体積である。

よって



$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OB^2 \cdot OA$$

ここで

$OB = \sqrt{2}$

$OA = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$

よって

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

したがって，求める体積は　$2V = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

(2)　O から辺 BC に下ろした垂線を OM とする。

中心 O，半径 OM の円を底面とし A を頂点とする円錐の体積を V' とする。

AO を軸として四角錐 A−BCDE を 1 回転させたとき，側面が通過する部分の体積を W とすると，

$W = V - V'$ である。

$OM = 1$，$OA = \sqrt{2}$ であるから

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OM^2 \cdot OA = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$$

したがって，求める体積は

$$2W = 2(V - V') = 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$